Differentielle du déterminant

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. *Montrons que* $\det$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* E *et que* $\mathrm{D}\det_{\mathrm{I_n}} = \mathrm{tr}$ *.*
2. *On en déduit que, pour tout* $X, H \in E$*, on a*

$$\mathrm{D}\det{}_X(H) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{Com}(X)H\right)$$

On munit E d'une norme quelconque. Le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. Pour obtenir $\mathrm{D}_{\mathrm{I_n}}\det$, il suffit donc de calculer la dérivée de det en $\mathrm{I_n}$ dans une direction quelconque $H \in E$. Or si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de H, celles de $I + tH$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont les $1 + t\lambda_i$, d'où

$$\det(I + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \mathrm{O}(t^2) = 1 + t\,\mathrm{tr}\,H + \mathrm{O}(t^2)$$

pour $t \to 0$.
Le coefficient de t donne $\mathrm{D}\det_{\mathrm{I_n}}(H) = \mathrm{tr}\,H$.

Si X est une matrice inversible, on se ramène immédiatement de X à $\mathrm{I_n}$ en écrivant

$$\begin{aligned}\det(X + H) &= \det X \cdot \det(I + X^{-1}H)\\ &= \det X \cdot \left(1 + \mathrm{tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|)\right)\\ &= \det X + \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{Com}(X)H\right) + o(\|H\|).\end{aligned}$$

Par suite

$$\mathrm{D}\det{}_X(H) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{Com}(X)H\right).$$

Les matrices inversibles forment un ouvert dense de E. En effet, elles sont caractérisées par $\det X \neq 0$, donc forment un ouvert. Pour $Y \in E$ donnée, de valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on peut choisir une suite (ε_k), convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout k

$$\det(Y - \varepsilon_k \mathrm{I_n}) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0.$$

Les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k \mathrm{I_n}$ sont alors inversibles et convergent vers Y dans E, d'où la densité annoncée.

L'application $X \mapsto {}^t\mathrm{Com}(X)$ est continue de E dans E puisque les cofacteurs sont des fonctions polynomiales des coefficients de X. Comme det est de classe $\mathcal{C}^1$, l'expression obtenue pour sa différentielle en un point inversible se prolonge par continuité à E tout entier.

Application.

On note $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$*. On va montrer que* G *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n^2}$*, de dimension* $n^2 - 1$*.*

Le groupe G est l'ensemble des $X \in E$ tels que $f(X) = 0$, en notant $f : E \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det(X) - 1$. C'est une fonction $\mathcal{C}^1$ (en fait $\mathcal{C}^\infty$) donc en particulier différentiable.
D'après ce qu'on vient de montrer, pour $X \in G$, $H \in E$

$$\mathrm{D}f_X(H) = \mathrm{tr}(X^{-1}H)$$

On a donc

$$\mathrm{D}f_X(X) = \mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) = n.$$

On en déduit que la forme linéaire $\mathrm{D}f_X$ est non nulle pour tout $X \in G$.

D'après le *théorème de submersion*, G est donc une hypersurface lisse de E, ie sous-variété de codimension 1 de E, et son espace tangent en X est l'ensemble des H tels que

$$\mathrm{tr}(X^{-1}H) = 0.$$

Pour $X = \mathrm{I_n}$, c'est le sous-espace formé des traces nulles. $\square$

Résultats utiles

Théorème de submersion. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $X := f^{-1}(y)$ où $y \in \mathbb{R}^m$.*
Si f est une submersion (i.e. si $\mathrm{D}f_x$ est surjective en tout point x de X), alors X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.
De plus, $T_x(X) = \ker(\mathrm{D}f_x)$.